大作业二

1. 令 S^1 为 $\mathbb{R}^2$ 中单位圆。证明：$|[0,1]| = |S^1|$ 。

2. 证明：若 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ 和 $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ 是 $\mathbb{Q}$ 上的两个柯西列，证明 $\{a_n \cdot b_n\}_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ 也是 $\mathbb{Q}$ 上的一个柯西列。

【本题为课件 [Part 4] 中第11页的最后一个练习。当时的上下文是通过对 $\mathbb{Q}$ 做完备化来得到 $\mathbb{R}$ 。换言之，在解答本题时，我们没有实数 $\mathbb{R}$ 的定义，更没有实数 $\mathbb{R}$ 上关于关于数列收敛的柯西准则。本题的要求是：仅仅基于柯西列的定义，证明两个柯西列的“乘积”仍然是个柯西列。】

3. 证明自由群 $\mathbb{F}_2$ 包含可数多个元素。

参考答案：

1. 提示：首先，构造 $[0,2\pi)$ 和 S^1 的一一对应。然后，可以使用 Cantor-Bernstein 定理，来证明 $|[0,2\pi)| = |[0,1]|$ 。

2. 提示：首先证明柯西列都是有界的（根据柯西列的定义不难得到）。然后，对于任意的 m, n ，注意如下不等式缩放即可

$$\begin{aligned}|a_m b_m - a_n b_n| &= |a_m b_m - a_m b_n + a_m b_n - a_n b_n| \\ &\leq |a_m b_m - a_m b_n| + |a_m b_n - a_n b_n| \\ &= |a_m||b_m - b_n| + |b_n||a_m - a_n|.\end{aligned}$$

3. 提示：考虑 $\mathbb{F}_2$ 中长度为 1 的字（简化后的），长度为 2 的简化字全体，等等。先证明任意长度为 n 的简化字全体都是有限集合。由此可得 $|\mathbb{F}_2| \leq |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ 。由于任意长度为 n 的简化字集合不是空集，有 $|\mathbb{F}_2| \geq |\mathbb{N}|$ 。注意到 $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ ，根据 Cantor-Berstein 定理，我们有 $|\mathbb{F}_2| = |\mathbb{N}|$ 。